



POLITECHNIKA OPOLSKA

WYDZIAŁ MECHANICZNY

Katedra Technologii Maszyn i Automatykacji Produkcji

Laboratorium Inżynierii Jakości

## Ćwiczenie nr 12

Temat:

### **Karta kontrolna wykładniczo ważonych średnich ważonych *EWMA***

#### **Zakres ćwiczenia:**

1. Dokonać pomiaru elementów zgodnie z ćwiczeniem 1.
2. Uszeregować wyniki w 25 próbek po 4 pomiary w każdej i dla każdej z próbek obliczyć wartość średnią.
3. Obliczyć dla karty wykładniczo ważonych średnich ruchomych: linię centralną, górną i dolną granicę kontrolną.
4. Obliczyć wartość wykładniczo ważonej średniej ruchomej dla  $i$ -tej próbki,
5. Sporządzić kartę kontrolną *EWMA* dla parametru  $\lambda=0,1$ .
6. Sporządzić kartę kontrolną *EWMA* i ruchomego  $R$  w programie *Statistica* dla różnych wartości parametru  $\lambda=0,1; 0,2; 0,4$ .
7. Zinterpretować uzyskane wyniki.
8. Opracować protokół i wnioski.

## Karta kontrolna wykładniczo ważonych średnich ważonych

Karta ruchomej wykładniczo ważonych średnich ruchomych *EWMA* (ang. *Exponentially-Weighted Moving Average*) jest podobna do karty średniej ruchomej *MA*.

W przypadku karty *MA* wszystkie wyniki w ustalonym oknie mają taki sam wpływ na wartość wykreślonego punktu. W przypadku karty *EWMA* (nazywanej czasami *GMA* – ang. *Geometric Moving Average*) do kolejnych próbek przyłożone są wagi. I tak, największy wpływ na położenie wykreślanego punktu ma próbka ostatnia (ma największą wagę), a wpływ próbek „starszych” maleje w sposób wykładniczy (im próbka starsza, tym ma mniejsze znaczenie). Podejście to zaproponowane przez S. W. Robertsa, jest bardzo logiczne.

Wykreślany punkt dla próbki  $i$  będzie miał wartość:

$$z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1}$$

gdzie:

$\lambda$  – (lambda) parametr karty kontrolnej,

$z_i$  – wartość wykładniczo ważonej średniej ruchomej dla  $i$ -tej próbki,

$z_{i-1}$  – wartość wykładniczo ważonej średniej ruchomej dla próbki  $i-1$ ,

$\bar{x}_i$  – wartość średnia w  $i$ -tej próbce.

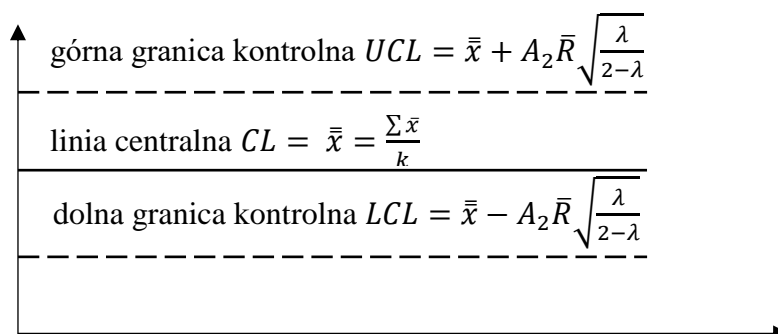
Od ustawienia wartości parametru  $\lambda$  zależy to, w jakim stopniu będą uwzględniane „starsze” próbki. Kiedy będzie on równy 1, wartość  $z_i$  będzie wynikała tylko z wartości średniej  $i$ -tej próbki. Przy wartości  $\lambda$  dążącej do 0 znaczenie  $i$ -tej próbki będzie malało na rzecz próbek „starszych”. Najczęściej wartość parametru  $\lambda$  przyjmuje się z zakresu  $0,2 \div 0,5$ , za preferowane uznaje się wartości  $0,3 \div 0,4$ . W przypadku, gdy np.  $\lambda = 0,2$ , wtedy 20% wpływu na wartość wykładniczo ważonej średniej ruchomej pozostawiona jest dla bieżącej próbki, a 80% dla danych historycznych.

Wzory do wyznaczenia granic kontrolnych dla karty zależą m.in. od tego, w jaki sposób szacowane jest (estymowane) rozproszenie wyników: za pomocą rozstępów (karta  $\bar{x} - R$ ) czy za pomocą odchylenia standardowego (karta  $\bar{x} - s$ ).

Wzory dla karty *EWMA*, w przypadku gdy jest ona stosowana jako uzupełnienie karty  $\bar{x} - R$  przedstawiono poniżej.

Tor karty kontrolnej *EWMA* i ruchomego  $R$ :

Punkt  $z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1}$



W karcie tej jako miara rozproszenia, używany jest rozrzut wyników w poszczególnych próbkach. W przypadku, gdy w czasie sterowania procesami obliczane jest odchylenia standardowe w każdej próbce (karta  $\bar{x} - s$ ), wzory dla karty *EWMA* mają postać przedstawioną poniżej:

karty kontrolnej *EWMA* i s:

Punkt  $z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1}$

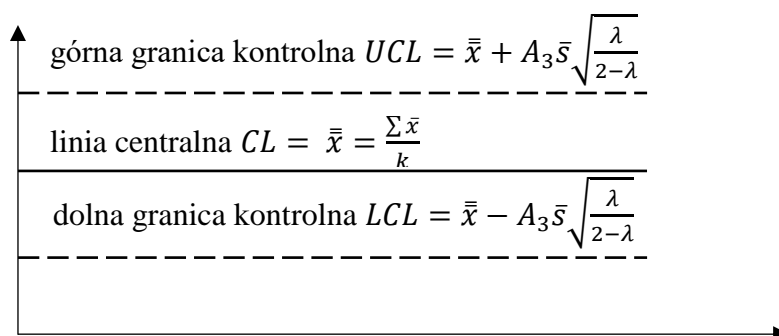


Tabela 1. Oznaczenia wielkości występujących w czasie konstruowania karty *MA* [7]

Oznaczenie	Nazwa
$\bar{x}$	wartość średnia w próbce
$\bar{\bar{x}}$	wartość średnia z wartości średnich
$k$	liczba próbek
$A_2, A_3,$	współczynnik statystyczny (dobierany z tablicy)
$\lambda$	Parametr karty kontrolnej
$\bar{R}$	wartość średnia z rozstępów w próbkach
$\bar{s}$	Wartość średnia z odchyłeń standardowych w próbkach

Warto zauważyć, że jeżeli wartość parametru  $\lambda = 1$ , to wzory do obliczenia granic kontrolnych na karcie *EWMA* przyjmą postać wzorów dla standardowych kart dla wartości średnich.

Przykładową kartę *EWMA* przedstawiono na rys. 1. Na tej karcie nie widać żadnych sygnałów o rozregulowaniu procesu. Wprawdzie rzuca się w oczy jakiś cykliczny przebieg („fala”) pomiędzy próbkami nr 10 i 19, ale ponieważ wykreślone punkty nie wykraczają poza granice kontrolne, nie należy ingerować w proces. Wykresy zarówno na karcie *MA*, jak i *EWMA*, zawsze będą bardzo „wygładzone” i często będą się na nich pojawiały pseudocykle. Dla pewności, że wszystko jest w porządku zawsze można wrócić do karty  $\bar{x} - R$  lub innej karty wartości średniej i przeprowadzić klasyczne testy wzorca przebiegu.

## PRZYKŁAD

Zdecydowano się na monitorowanie pewnego procesu za pomocą kart kontrolnych. W tym celu zaczęto pobierać próbki. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3. Dane z pomiarów

Nr próbki	Pomiar $x_i$	$z_i$	UCL		LCL		CL
1	32,0	30,880	31,7670		29,4330		30,6
2	27,0	30,104	32,0945		29,1055		
3	33,0	30,683	32,2707		28,9293		
4	29,3	30,407	32,3744		28,8256		
5	30,1	30,345	32,4376		28,7624		
6	27,0	29,676	32,4770		28,7230		
7	31,0	29,941	32,5017		28,6983		
8	30,1	29,973	32,5174		28,6826		
9	31,2	30,218	32,5274		28,6726		
10	30,5	30,275	32,5338		28,6662		
11	29,6	30,140	32,5378		28,6622		
12	28,1	29,732	<b>32,5404</b>	32,54	<b>28,6596</b>	28,65	
13	29,9	29,765	<b>32,5421</b>		<b>28,6579</b>		
14	31,3	30,072	<b>32,5431</b>		<b>28,6569</b>		
15	30,1	30,078	<b>32,5438</b>		<b>28,6562</b>		
16	31,2	30,302	<b>32,5442</b>		<b>28,6558</b>		
17	32,6	30,762	<b>32,5445</b>		<b>28,6555</b>		
18	33,3	31,269	<b>32,5447</b>		<b>28,6553</b>		
19	34,8	31,976	<b>32,5448</b>		<b>28,6552</b>		
20	29,9	31,560	<b>32,5449</b>		<b>28,6551</b>		
Średnia $\bar{x}$	<b>30,6</b>						
Sigma $\sigma$	<b>1,95</b>						

Obliczenia dla karty *EWMA*:

Wartość parametru  $\lambda=0,2$

Punkt 1:

$$z_1 = \lambda \cdot \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \cdot z_0$$

$$z_0 = \bar{x}$$

$$z_1 = (0,2 \cdot 32) + (1 - 0,2) \cdot 30,6 = 30,880$$

Punkt 2:

$$z_2 = \lambda \cdot \bar{x}_2 + (1 - \lambda) \cdot z_1$$

$$z_2 = (0,2 \cdot 27) + (1 - 0,2) \cdot 30,880 = 30,104$$

Punkt 3:

$$z_3 = \lambda \cdot \bar{x}_3 + (1 - \lambda) \cdot z_2$$
$$z_1 = (0,2 \cdot 33,0) + (1 - 0,2) \cdot 30,104 = 30,683$$

Punkt 4÷25:

$$z_i = \lambda \cdot \bar{x}_i + (1 - \lambda) \cdot z_{i-1}$$

Linia centralna wyrażana jest jako wartość średnia  $\bar{x}$ , jednakże może ona przyjmować również wartość  $\mu_0$ , która jest uznawana w tym przypadku za wartość wzorcową, docelową (cel).

Jeżeli linię centralną określimy jako  $\mu_0$ , a nie jako wartość średnią, to i do obliczenia wartości granic kontrolnych  $UCL$  i  $LCL$  należy przyjąć wartość  $\mu_0$ , a nie wartość średnią  $\bar{x}$ .

Linia centralna:  $CL = \bar{x}$

$$UCL = \bar{x} + 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot i}]}$$
$$LCL = \bar{x} - 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2 \cdot i}]}$$

Próbka 1

$$UCL = 30,6 + 3 \cdot 1,95 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 - 0,2} [1 - (1 - 0,2)^{2 \cdot 1}] = 31,767}$$
$$LCL = 30,6 - 3 \cdot 1,95 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 - 0,2} [1 - (1 - 0,2)^{2 \cdot 1}] = 29,433}$$

Próbka 2

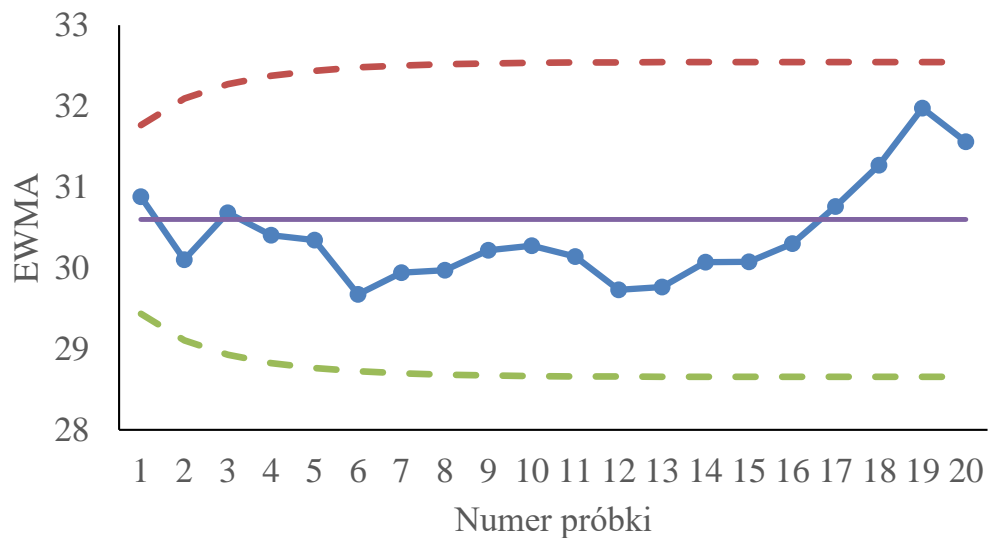
$$UCL = 30,6 + 3 \cdot 1,95 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 - 0,2} [1 - (1 - 0,2)^{2 \cdot 2}] = 32,094}$$
$$LCL = 30,6 - 3 \cdot 1,95 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 - 0,2} [1 - (1 - 0,2)^{2 \cdot 2}] = 29,105}$$

Granice kontrolne są zmienne, najpierw wydają się, że zakrzywiają się a następnie poziomują. Granice kontrolne zbliżają się do wartości:

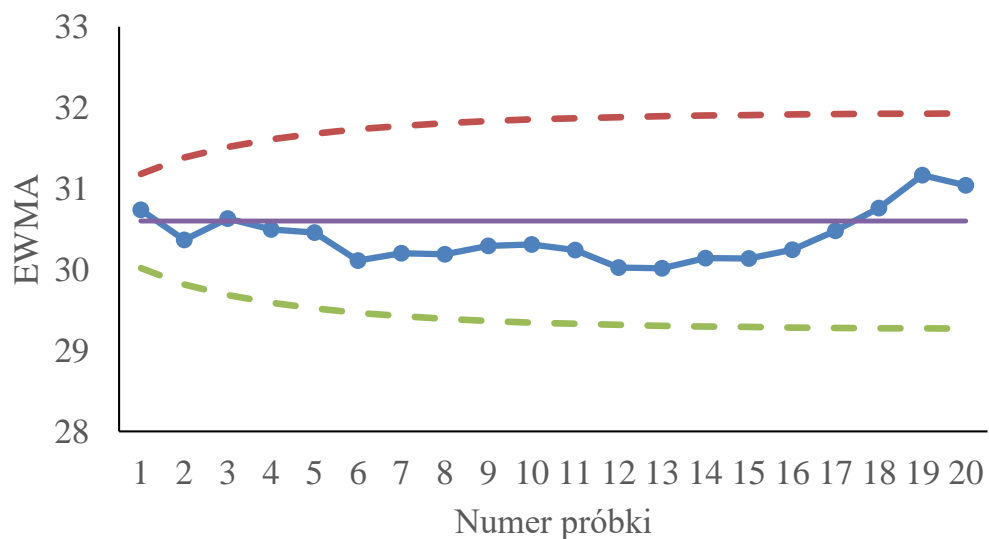
$$UCL = \bar{x} + 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = 30,6 + 3 \cdot 1,95 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 - 0,2}} = 32,54$$

$$LCL = \bar{x} - 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = 30,6 - 3 \cdot 1,95 \cdot \sqrt{\frac{0,2}{2 - 0,2}} = 28,65$$

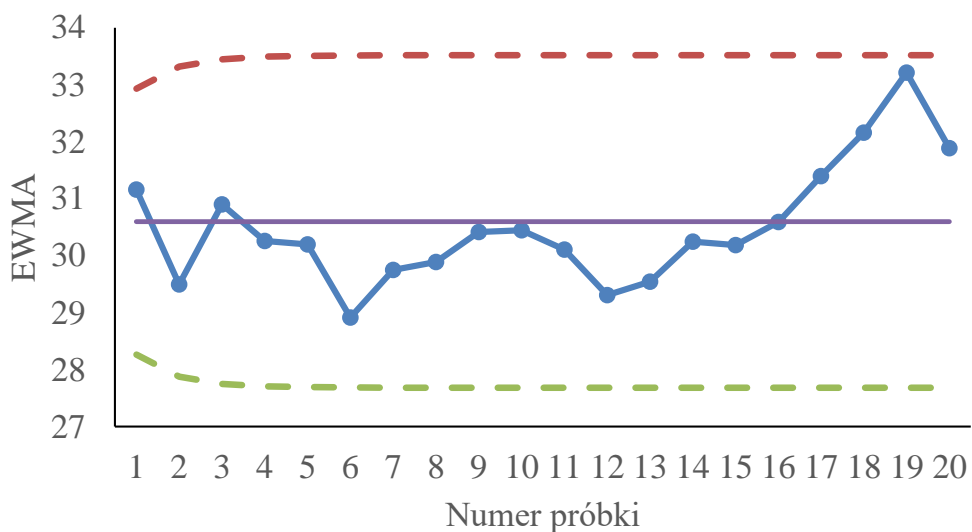
Na rys. 1÷3 pokazano wpływ parametru  $\lambda$  na kartę kontrolną EWMA.



Rys. 1. Karta kontrolna EWMA dla  $\lambda=0,2$



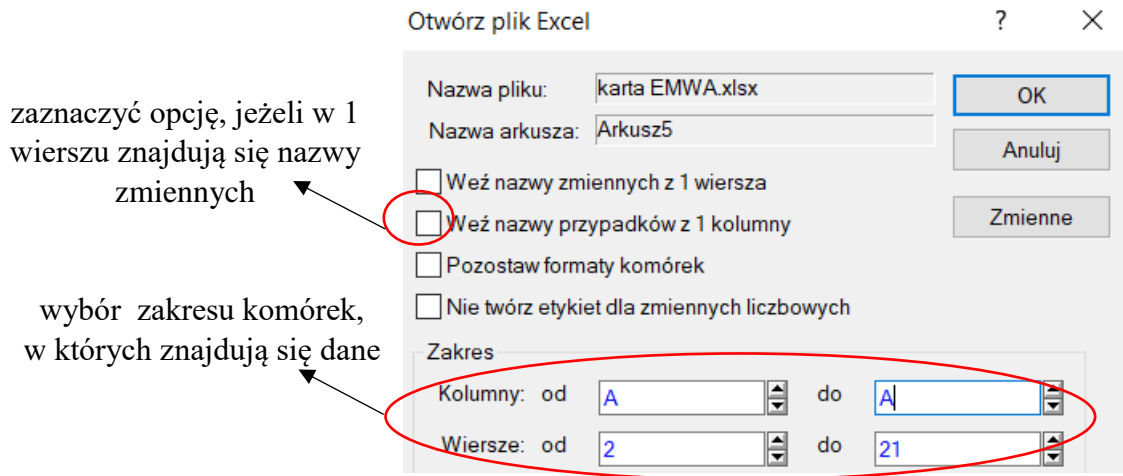
Rys. 2. Karta kontrolna EWMA dla  $\lambda=0,1$



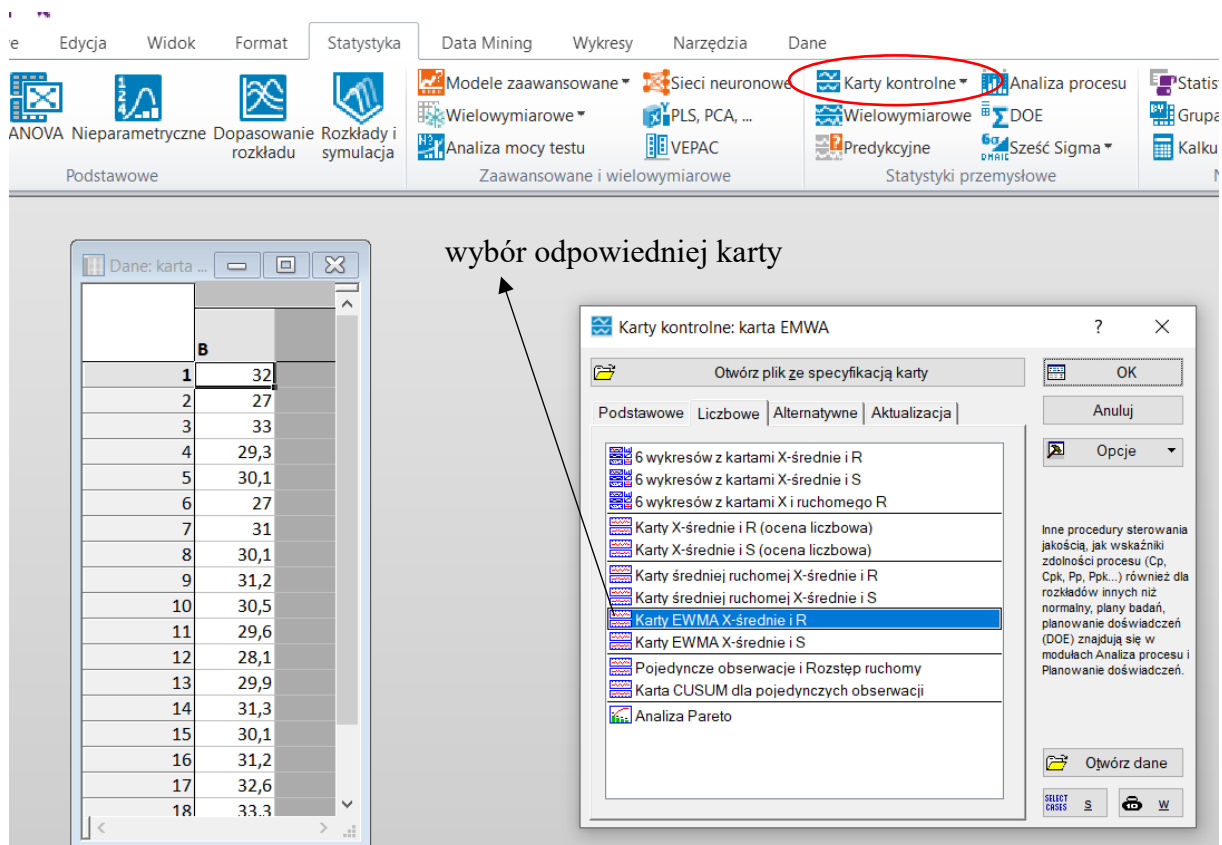
Rys. 3. Karta kontrolna EWMA dla  $\lambda=0,4$

## Karta kontrolna w programie Statistica

Otwórz → wybrać miejsce docelowe pliku → Import wybranego arkusza

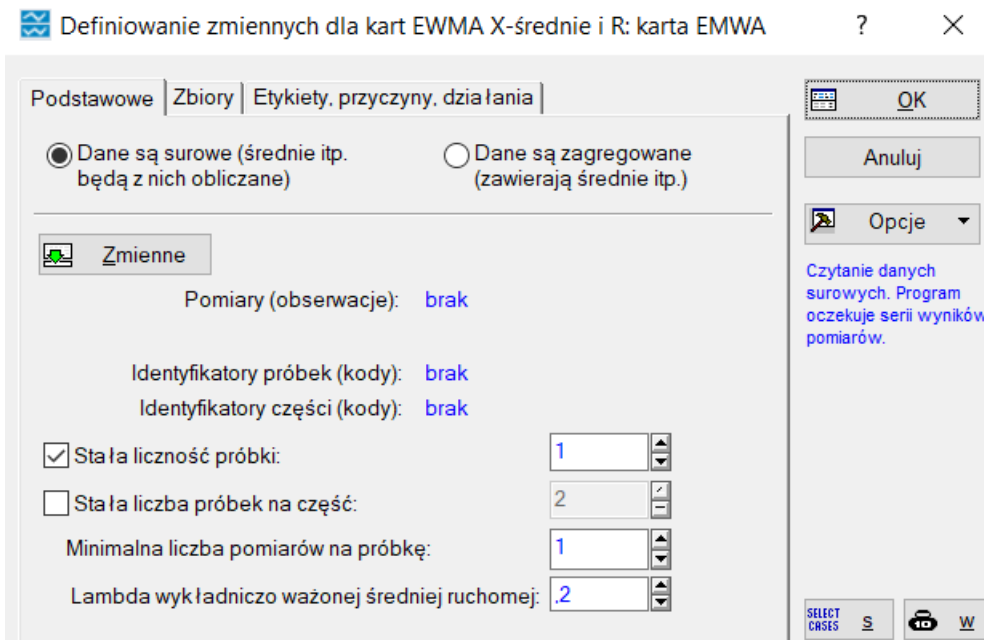


Rys. 4. Import wybranego arkusza w programie Statistica



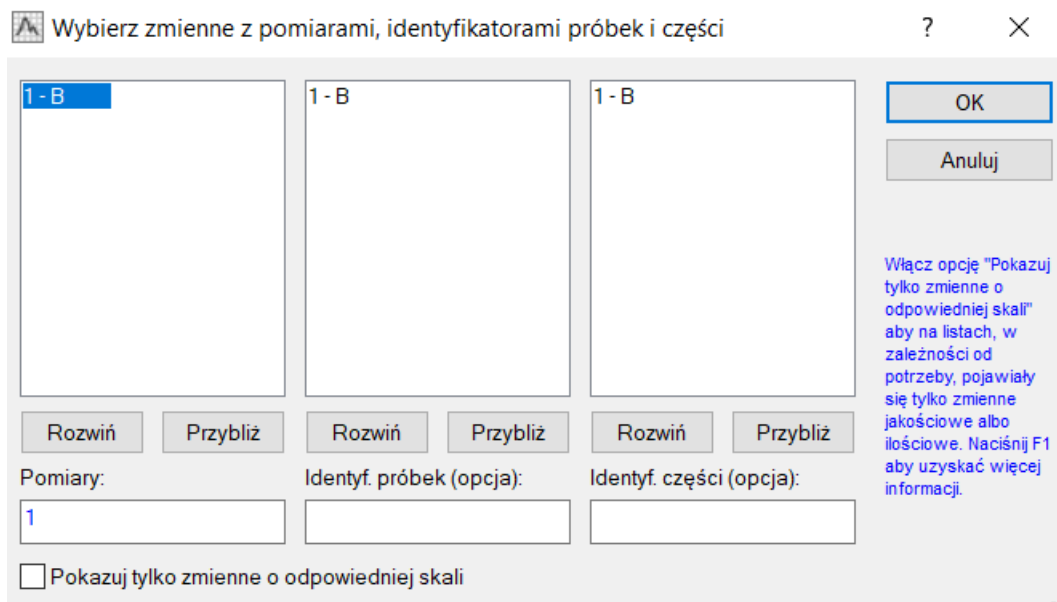
Rys. 5. Wybór odpowiedniej karty kontrolnej

(zakładka Statystyka → Karty kontrolne → Liczbowe → Karty EWMA X-średnie i R)



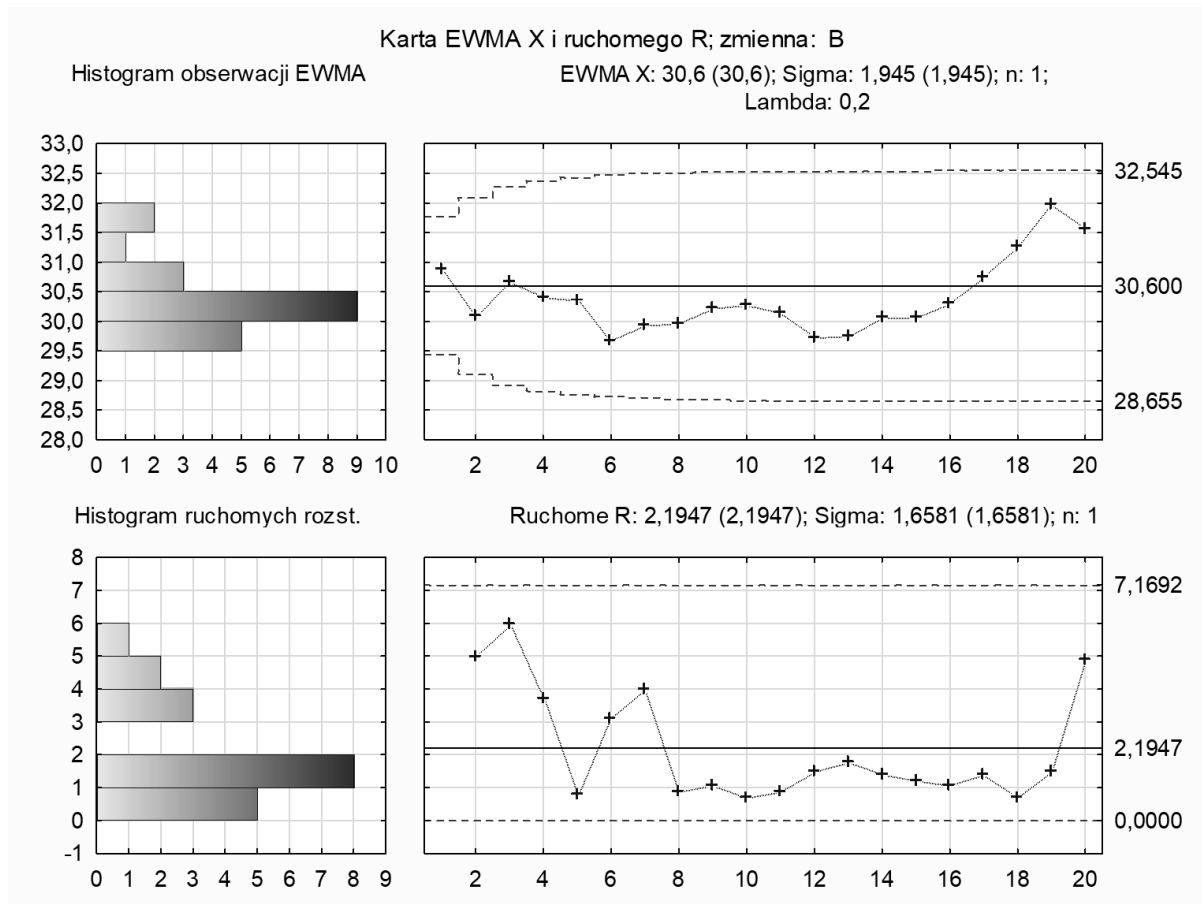
Rys. 6. Definiowanie zmiennych dla karty EWMA

Definiowanie zmiennych polega na ustawieniu stałej liczebności próbki na poziomie np. 1 oraz minimalnej liczbie pomiarów na próbkę np. 1, a także parametru wykładniczo ważonej średniej ruchomej (lambda) np.  $\lambda=0,2$ .



Rys. 7. Wybór miejsca, w którym znajdują się zmienne z pomiaram





Rys. 8. Karta kontrolna EWMA w programie Statistica

### Literatura:

1. Greber T.: Statystyczne sterowanie procesami - doskonalenie jakości z pakietem Statistica, Statsoft, Kraków 2000.
2. <https://www.spcforexcel.com/knowledge/variable-control-charts/keeping-process-target-ewma-chart>
3. Montgomery D. M.: Introduction to statistical quality control, Wiley, United States of America 2009.